הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״ : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

הנושא: **״משפט פיתגורס והרחבותיו״**

הוכן ע״י: אדם קניגסברגר.

תקציר: החומר כולל תקציר של סרט וידאו ובו הוכחות שונות למשפט פיתגורס ורעיונות נוספים לטיפול בנושא. ניתן להשתמש בו גם באופן בלתי תלוי בסרט .

מילות מפתח: הנדסת המישור (גיאומטריה), משפט פיתגורס, סרט וידאו.

החומר הוגש במסגרת:
״קשר-חם״, הכנס הארצי של מרכזי המקצוע מתמטיקה, שנה״ל תשנ״ב, אפריל 1992.
״קשר-חם״, הכנס הארצי של מרכזי המקצוע מתמטיקה, שנה״ל תשנ״ג, מרץ 1993.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 8 עמודים.

משפט פיתגורס והרחבותיו

הקדמה

אילו נתבקשתם לחשוב על משפט מתמטי בעל ערך לתרבות האנושית ולקידום המדע האנושי כולו, שהוא גם שימושי וגם נחשב לאחת האמיתות האוניברסליות בוודאי הייתם חושבים על משפט פיתגורס.
לא פלא שהמתמטיקאי דוד סמית, הראוי להקרא בשם משורר המתמטיקה, בחר בתבנית אור ענקית בדמות משפט פיתגורס ליצירת קשר בינינו ובין יצורי המאדים .

להלן דבריו הנפלאים של דוד סמית:
"החשבת מימיך מה תעשה אם תבוא לנסות למצוא קשר של אותות עם המאדים? קבע תקבע במרחבי סהרה מקור אור עצום שיגלם צורה כל שהיא אשר אם יראנה איש המאדים, יהיה בטוח כי אין היא צירוף מקרי או שורה מקרית של רשמי אור, אלא משהו מובן לו! אולם זו לא תוכל להיות צורת עצם חי, כי אם יש חיים על המאדים, מראיהם שונה ללא ספק מאלה של הארץ. זו לא תוכל להיות גם צורת מלים באותיות, אשר עברו אלינו מדור לדור, ולא צורת מספרים, אשר מקורם עתיק ימים, כנראה בדתות המלכים של הודו. לא, לא זאת ולא זאת. הסמל הבטוח ביותר, שנוכל לתאר, כדי למשך את תשומת לבו של עולם עתיק הרבה יותר מעולמנו, וכנראה גם מפותח יותר, אינו אלא - צורת משפט פיתגורס, ריבועי שלוש הצלעות של משולש ישר זווית! אל נא תחייך הקורא, לרעיון זה - סמל טוב יותר לא יעלה בדעתך. וסיבת הדבר: כאן לפנינו אחת מאמיתות התבל. לפני היות המאדים, או הארץ, או השמש, ואחרי אשר כל אלה יחדלו, פה, שם ובאיזורים הנדחים ביותר של מרחבי הכוכבים למיניהם הידועים לנו, ריבוע היתר היה, הווה ויהיה תמיד שווה לסכום ריבועי הניצבים. כל תורותינו הפעוטות על החיים, כל מחקרינו הילדותיים על המוות, וכל ויכוחינו קלי הערך בבתי המדרש - כל אלה אינם אלא אבק פורח בקרן שמש בהשוואה לניצחיות הכפולה, העבר והעתיד, המצויה באמת הזאת".
(מתוך מס' 10 ו-12 ברשימה הביביליוגרפית).

אנשי מדע, שעסקו בבעיה הזו של יצירת תקשורת עם יצורים אינטיליגנטיים החיים באחד מכוכבי הלכת, שמחוץ למערכת השמש שלנו, הגיעו למסקנה כי ההודעה (קליטת שידור או העברתו), שתהיה מובנת ביותר לכל יצור אינטיליגנטי תהיה - הודעה מתמטית מהסוג של משפט פיתגורס. גזע מפותח שמחוץ לכדור הארץ, יוכל להעביר ידיעות בצופן פשוט, ושדרי חלל יוכלו להעביר אותות ולהחליף עובדות ונוסחאות מתמטיות ליצירת תקשורת.

במצפה הרדיו השוכן בגרין בוק בארה"ב כיוונו אנשי המדע שתי אנטנות ענק לעבר שני כוכבים מרוחקים, תאו סאטו ואפסילון אריאדני לקליטת צופן מתמטי העשוי להגיע מהם. העובדה שמחפשים "צופן" מתמטי מתבססת על הרעיון, שהמתמטיקה מיצגת אמת מוחלטת ושהיא שפה מופשטת, שניתן לקוות כי כל היצורים האינטיליגנטיים ביקום יכולים להבין אותה.

קיים סרט וידאו על משפט פיתגורס (מקור מס' 1 ברשימה הביבליוגרפית). בדפים הבאים יש הצעה להצגת משפט פיתגורס בכיתה, בליווי הסרט. ניתן להשתמש ברעיונות המוצגים בדפים אלה גם ללא צפיה בסרט.

<u>תקציר של סרט הוידאו על משפט פיתגורס</u>

הסרט מדגים משפטים מתמטיים באמצעים חזותיים וקוליים, שאין באפשרותנו להראותם באמצעות לוח וגיר או בספר לימוד. הסרט מאפשר להעביר אינפורמציה רבה בזמן קצר יחסית, כיוון שיש באפשרותנו לעצור את הסרט - להסביר או להקרין קטעים מחדש. מטרת סרט כזה היא לא להחליף את המורה, אלא לעודד ולגרות את התלמידים לדיון בנושא.

1. הסרט מתחיל בחזרה על שלושה רעיונות מרכזיים, (שצריכים להיות מוכרים לתלמיד):
א. היחס בין צלעות מתאימות של משולשים דומים הוא קבוע.
ב. לכל המשולשים (המקבילית) שהם בעלי צלע משותפת ואשר הקודקוד (הצלע) מולה נמצא(ת) על אותו ישר המקביל לה, יש אותו שטח .
ג. במצולעים דומים, אם אורך הצלע מוכפל בגודל k , אזי שטח הצורה מוכפל ב- k^2 .

מוצגים שלושה מצבים מהחיים, המובילים לאותה בעיה מתמטית: כיצד מוצאים צלע של משולש ישר זוית אם ידועות שתי הצלעות האחרות?

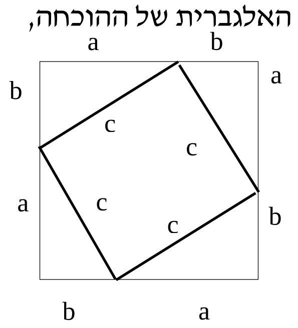
2. <u>הוכחות למשפט פיתגורס</u>

2.1 הסרט מציג מספר דרכים להוכחת משפט פיתגורס. הראשונה, הנקראת ההוכחה האלגברית של משפט פיתגורס, מבוססת על חלוקת משולש ישר זווית על ידי הגובה ליתר לשני משולשים הדומים לו. מהצגת היחסים בין הצלעות נובע משפט פיתגורס, שמוצג אחר כך בצורה גיאומטרית ויזואלית.
מופיעה סקירה הסטורית על פיתגורס, שנולד בשנת 572 לפנה"ס באי סמוס לא רחוק ממילטוס - ביתו של תלס, שכפי הנראה היה מורו. פיתגורס יסד בעיר הנמל היוונית קרוטונה בדרום איטליה את בית ספרו המפורסם, שהפך לאקדמיה לפילוסופיה, מתמטיקה ומדעי הטבע. הפילוסופיה הפיתגוראית נשענת על ההנחה, שהמספרים השלמים הם הסיבה לתכונות השונות של האדם והחומר - ושולטים בעולם מבחינה איכותית וכמותית.
בנקודה זו רצוי להפסיק את ההקרנה ולהפנות את התלמידים לאנציקלופדיה או למקורות אחרים, ולבקש מהם לכתוב מאמר על חיי פיתגורס, ועל ה"אחווה" הפיתגוראית שהוא הקים, וכן על תרומתו למתמטיקה ולהרמוניה המוסיקלית.
עבודה אחרת, שמומלצת בשלב זה, היא מתן הוכחה לעובדה ש- $\sqrt{2}$ הוא מספר אי רציונלי.

שלושה מספרים טבעיים a, b, ו-c המקיימים את המשואה: $a^2+b^2=c^2$ נקראים שלשה פתגוראית. למשל, 3, 4 ו- 5 או 5, 12, 13.
אוקלידס עצמו התייחס לנושא בספרו "היסודות" משפט 28.

2.2 אחת ההוכחות, שמוצגת בסרט מיוחסת לסינים והגירסה האלגברית של ההוכחה, המוצגת בסרט באמצעות אנימציה היא:
השטח הפנימי הוא ריבוע ששטחו c^2 .
וכן יש ארבעה משולשים ששטח כל אחד מהם הוא $\frac{ab}{2}$.
סכום השטחים הנ"ל שווה לשטח ריבוע שצלעו $a+b$.

לכן: $$\left(a+b\right)^2=c^2+4\cdot\frac{ab}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$a^2+b^2=c^2$$



איור מס' 1

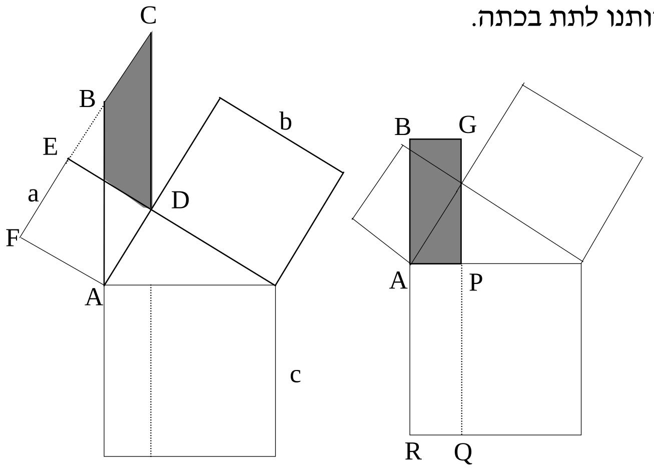
2.3 הוכחה אחרת מיוחסת לאוקלידס, שהתפרסם בזכות ספריו "היסודות" שהכילו את רוב המתמטיקה שהיתה ידועה בזמנו. ספריו השפיעו על החשיבה המדעית דורות רבים אחריו. משפט פיתגורס מופיע בספרו הראשון כמשפט מס' 47 והוכחתו מיוחסת לאוקלידס עצמו. רעיון ההוכחה הוא הארכת הגובה ליתר, כך שהוא מחלק את הריבוע הבנוי על היתר לשני מלבנים שכל אחד מהם שווה בשטחו לשטח אחד הריבועים הבנויים על הניצבים .
גירסה נוספת של ההוכחה המופיעה בסרט מדגימה יפה את חוזקו של המכשיר המסוגל לתת הוכחה דינמית שאין באפשרותנו לתת בכתה.

המחשה של שיוויון שטחים נעשית בתהליך של "זרימת" חומר המכסה בדיוק את השטח.
השטחים השווים הם:

הריבוע ADEF ,

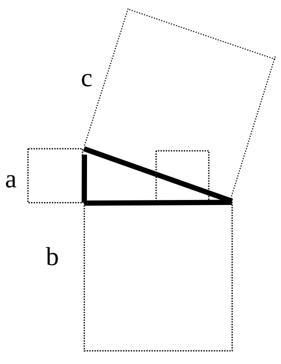
המקבילית ADCB,

והמלבנים APGB ו- ARQP

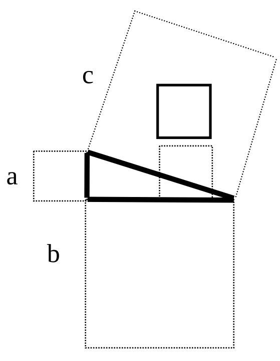


איור מס' 2

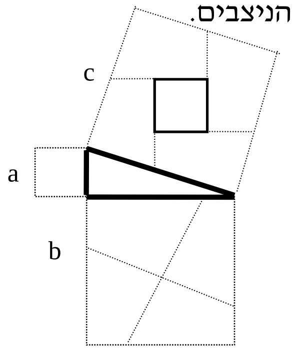
2.4 הוכחה יפה אחרת המופיעה בסרט היא בשיטת "החיתוך". באיור מס' 3 מופיע משולש ישר זווית שניצביו a ו- b ויתרו c. על כל אחת מצלעותיו בנוי ריבוע. הריבוע שצלעו a מוזז לאורך הניצב b עד שצלעו השמאלית חותכת את אמצע היתר (איור 3א) ואז מזיזים אותו במאונך כלפי מעלה לאמצע הריבוע הגדול. כלומר נקודת פגישת אלכסוניו מתלכדת עם נקודת הפגישה של אלכסוני הריבוע שעל היתר (איור 3ב). ממשיכים את צלעותיו עד לחיתוכן עם צלעות הריבוע הגדול (איור 3ג). חיתוכים נעשים בהמשכי הצלעות. מחמשת החלקים, שנוצרו בריבוע הבנוי על היתר ניתן להרכיב את הריבועים הבנויים על הניצבים.



איור מס' 3א

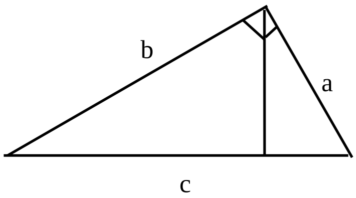


איור מס' 3ב



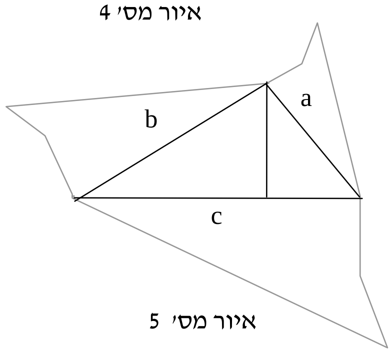
איור מס' 3ג

2.5 אחת הדוגמאות היפות בסרט מתייחסת להרחבה של משפט פיתגורס (משפט 31 בספרו הרביעי של אוקלידס).



איור מס' 4

נתון משולש ישר זוית שניצביו a ו- b ויתרו c .

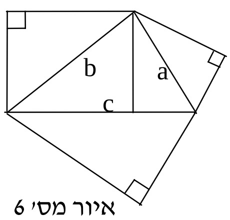


איור מס' 5

נתבונן באיור מס' 5 : המצולעים הבנויים על שלוש צלעות המשולש ישר הזווית דומים זה לזה, כאשר K הוא יחס הדמיון. שטח המצולע בנוי על היתר בציור זה הוא Kc^2 ושטחי מצולעים הבנויים על הניצבים הם Ka^2 ו- Kb^2 . לכן אם המשוואה $a^2+b^2 = c^2$ נכונה, הרי גם המשוואה $Ka^2 + Kb^2 = Kc^2$.

כלומר ממשפט פיתגורס נובע משפט 31 של אוקלידס : אם שלוש צורות דומות נבנות על צלעות של משולש ישר זוית אז הצורה הבנויה על היתר שווה בשטחה לסכום שטחי הצורות הבנויות על הניצבים.

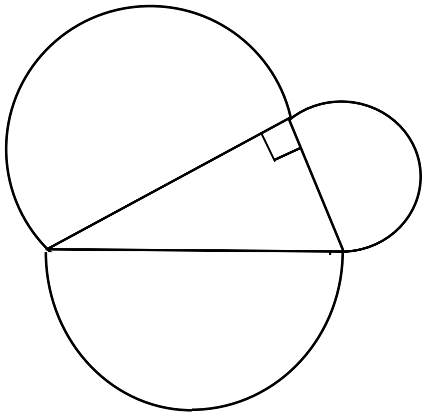
ולהפך : ממשפט 31 בספרו הרביעי של אוקלידס אפשר לתת הוכחה מיידית למשפט פיתגורס : מחלקים את המשולש ישר הזווית לשני משולשים (ישרי זווית) ע"י העברת הגובה ליתר. בונים משולשים ישרי זוית על הצלעות של משולש ישר זוית מבחוץ כך, שיהיו חופפים למשולשים ישרי הזוית, שבתוך המשולש (איור מס' 6).



איור מס' 6

מכיוון שסכום שטחי המשולשים ישרי הזוית שנוצרו על ידי הגובה שווה לשטח המשולש המקורי, הרי גם לגבי המשולשים שנבנו מחוץ למשולש המקורי קיים : שטח המשולש הגדול שווה לסכום שטחי שני המשולשים הקטנים .
כיוון שראינו קודם ש- $Ka^2 + Kb^2 = Kc^2$, הרי גם המשפט $a^2 + b^2 = c^2$ מתקיים על ידי חילוק שני האגפים ב- K .

כמו כן כדאי לזכור כי היחס בין שטחי משולשים דומים הוא כיחס בין ריבועי צלעותיהם. מכאן נובע, שההכללה של משפט פיתגורס מתקיימת גם עבור חצאי מעגלים (מדוע?).



איור מס' 7

בסרט מתייחסים גם להרחבה של משפט פיתגורס למרחב התלת מימדי, המאפשרת חישוב אלכסון התיבה.
הסרט מסתיים בהרחבה נוספת, המתייחסת למשולשים שאינם ישרי זווית בהם מתקיים משפט הקוסינוסים ובתמונה מתוך הגיאומטריה הלא אוקלידית, של משולש על פני חצי כדור.

3. <u>מספר רעיונות נוספים לטיפול בנושא לאחר הצפיה</u>

3.1 <u>שלושת פיתגוראיות</u> (מתוך מס' 3 ברשימה הביבליוגרפית):
נרשום טבלת מספרים שלמים שבה: X, Y, Z מקיימים את המשוואה: $X^2+Y^2=Z^2$ כאשר X מייצג מס' אי זוגי.
על התלמידים להמשיך את הטבלה ולגלות את הקשר בין X ,Y ו- Z ולבטא אותו בעזרת משתנה אחד.

X	Y	Z
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41

למשל: $X = 2n + 1$ (n טבעי ו- X אי זוגי)

$Y = 2n^2 + 2n$

$Z = 2n^2 + 2n + 1$

עתה נרשום טבלת מספרים שלמים בה Z,Y,X מקיימים את המשוואה $X^2 + Y^2 = Z^2$ כאשר X מייצג מס' זוגי ונבקש מהתלמידים להמשיך את הטבלה, ולמצוא קשר דומה לזה שלמעלה.

X	Y	Z
8	15	17
12	35	37
16	63	65
20	99	101

אפשר להמשיך ולבנות טבלה המקיימת את הקשר $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$, כאשר a מקבל את הערכים 1, 2, 3, 4, 5, 6...
ו- b מקבל את הערכים 2, 3, 4, 5, 6, 7... בהתאמה.
על התלמידים יהיה למצוא את c ו- d, למצוא חוקיות, ולבטא את d, c, b, a בעזרת משתנה אחד.

למשל: a=n

b=n+1

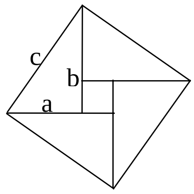
$c=n^2+1$

$d=n^2+n+1$ (n טבעי)

על התלמידים להוכיח שהקשרים אכן מקיימים את משפט פיתגורס, ולמצוא את הקשר
בין a, b, c, d לבין X, Y, Z.

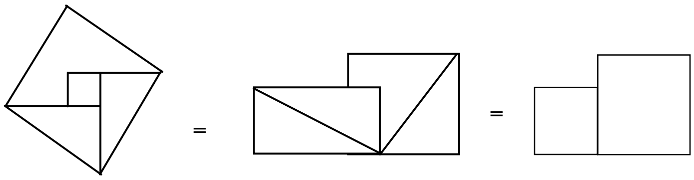
3.2 <u>הדגמות להוכחת משפט פיתגורס</u>

א. בציור הבא a ו- b הם הניצבים ו- c היתר של משולש ישר זווית.
הריבוע הקטן שבמרכז הוא בעל צלע (b-a).
יש להוכיח באופן אלגברי את משפט פיתגורס בעזרת השרטוט הנ״ל.



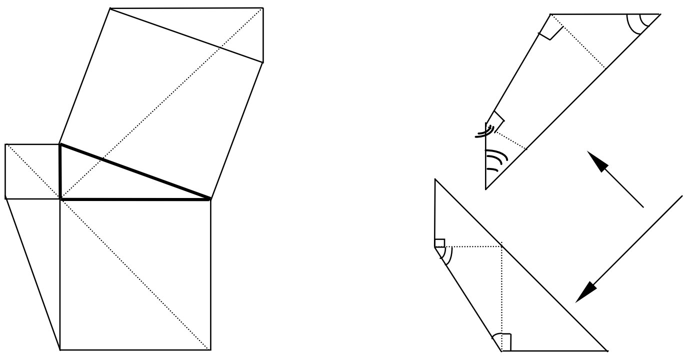
איור מס׳ 8

ב. המתמטיקאי ההודי בסקרא (Bhaskara) נתן הוכחה למשפט פיתגורס המבוססת על הסרטוטים הבאים. (הוא לא צרף את הסבריו לסרטוטים).
נסו להוכיח משפט זה בעזרת איור מס׳ 9.



איור מס׳ 9

ג. לאונרדו דה וינצ׳י (1519-1452) נתן הוכחת ״חיתוך״ למשפט פיתגורס. הסתכלו באיור מס׳ 10 והראו כיצד אפשר לקבל את משפט פיתגורס על ידי החסרת חלקים זהים.


איור מס׳ 10

<u>ביבליוגרפיה</u>

1. Apostol, T.M. (1988). <u>The Theorem of Pythagoras</u>. Program Guide and Workbook. Project MATHEMATICS, California Institue of Technology California.

2. Asger, A. (1964). <u>Episodes from the early History of Mathematics Library</u>, Random House.

3. Bregman, J.C. (1991). Squares. <u>Mathematics Teacher</u>, 84 (8).

4. Chakerian, G.D., Cravill, C.D., & Stein, S.K. (1987). <u>Geometry - A Guided Inquiry</u> , Sunburst Communications, Inc.

5. Courant, R. & Robbins, H. (1978). <u>What is Mathematics?</u>. Oxford University Press.

6. Coxeter, H. S. M. (1969). <u>Introduction to Geometry</u>. John Wiley & Sons.

7. Eves, H. (1964). <u>An Introduction to the History of Mathematics</u>. Holt, Rinehart and Winston.

8. Heath, T.L. (1931). <u>History of Greek Mathematics</u>. 2 Vol. Oxford University Press, New - York.

9. Loomis, E.S. (1940). <u>The Pythagorean Proposition</u>. 2nd ed. Ann Arbon, Mich: privately printed, Edward Broters.

10. Smith, D.E. (1928). <u>Mathematic in the Training for Citizenship</u>. National Council of Teachers of Mathematics, 3rd Yearbook, N.Y.

11. Van der Waerden, B.L. (1983). <u>Geometry and Algebra in Ancient Civilization</u>. Springer - Verlag.

12. בן-יהודה. (תשי״ט). <u>הוראת המתמטיקה בבית הספר התיכון</u>. בהוצאת ״מסדה״ בע״מ, ת״א.